I. Racines carrées d'un nombre complexe

Définition

Soit $Z \in \mathbb{C}$, on appelle racine carrée de Z tout nombre complexe z vérifiant : $z^2 = Z$.

Cas particulier

Si Z = 0 alors ($z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$) donc 0 est l'unique racine carrée de 0.

Exemple

Trouver les racines carrées de i, revient à résoudre l'équation $z^2 = i$.

Méthode algébrique

On pose $z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$z^2 = i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = i \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases} \text{ or } |z^2| = |i| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{1}{2} \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ ou } (x, y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Ainsi $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont les deux racines carrées de i.

Méthode trigonométrique

On pose $z = [r, \alpha] = r\,e^{i\alpha} \Rightarrow z^2 = [r^2, 2\alpha] = r^2 e^{2i\alpha}$

$z^2 = i \Leftrightarrow r^2 e^{2i\alpha} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} r^2 = 1 \\ 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow z = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } z = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Théorème

Tout nombre complexe non nul Z = [r, θ] admet exactement deux racines carrées opposées l'une de l'autre qui sont $z_1 = \left[\sqrt{r}, \frac{\theta}{2}\right]$ et $z_2 = \left[\sqrt{r}, \pi + \frac{\theta}{2}\right]$